

基于曲率增广的智能车辆轨迹跟踪控制

刘果^{1,2}, 熊坚¹, 杨秀建¹, 何扬帆¹

(1. 昆明理工大学交通工程学院, 昆明 650504; 2. 昆明理工大学城市学院, 昆明 650051)

摘要:设计了一种带转角补偿的曲率增广模型预测控制+比例积分控制器,以提高智能车辆
在非直线参考轨迹下的跟踪精度。首先,基于跟踪偏差车辆模型,将曲率作为增广量设计模型
预测控制算法,分析了曲率增广对控制器性能的影响。其次,利用李雅普诺夫直接方法获得保
证算法稳定的预测时域,计算了稳态误差,并设计了比例积分控制器补偿前轮转角以消除稳态
横向偏差。最后,进行了仿真分析,结果表明:本文所设计的控制器在保证稳定性和平顺性的
同时,可提高车辆轨迹的跟踪精度且收敛速度更快,在不同极限稳定条件下也能获得较好的控
制效果。

关键词:自动控制技术;智能车辆;轨迹跟踪;曲率增广模型预测控制;比例积分控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5497(2024)12-3717-12

DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20230167

Intelligent vehicle trajectory tracking control based on curvature augmentation

LIU Guo^{1,2}, XIONG Jian¹, YANG Xiu-jian¹, HE Yang-fan¹

(1. Faculty of Transportation Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650504, China;
2. City College, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650051, China)

Abstract: In order to improve tracking accuracy of intelligent vehicle under non-linear reference
trajectories, a curvature augmentation model predictive control/proportional integral controller with front
wheel angle compensation was proposed. First, based on tracking deviation vehicle model, model
predictive control algorithm was designed by using curvature as augmentation state, and influence of
curvature broadening was analyzed. Then, Lyapunov direct method was used to obtain predictive horizon
that ensures algorithm stability, and system steady-state error was calculated. To eliminate steady-state
lateral deviation, proportional integral controller was designed to compensate front wheel angle. Finally,
simulation was conducted and results show that, the designed controller improves trajectory tracking
accuracy and achieves better convergence rate, while ensuring stability and smoothness, and obtains good
control effect under limit conditions.

Key words: automatic control technology; intelligent vehicle; trajectory tracking; curvature augmentation
model predictive control; proportional integral control

收稿日期: 2023-02-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(52162046).

作者简介: 刘果(1983-), 女, 博士研究生. 研究方向: 智能车辆轨迹跟踪和控制. E-mail: liuguokust@126.com

通信作者: 熊坚(1959-), 男, 教授, 博士. 研究方向: 智能车辆轨迹跟踪和控制. E-mail: xiebox@163.com

0 引言

近年来,智能车辆在学术和应用层面都取得了突破性进展,而轨迹跟踪是智能车辆实现自动驾驶的关键技术^[1]。轨迹跟踪是通过调节前轮转角控制车辆跟踪参考轨迹^[2],稳定性、跟踪精度和平顺性是其重要指标^[3]。

当车辆在转弯或变道行驶时,参考轨迹曲率变化对跟踪精度和平顺性影响较大。为此,一些学者提出驾驶预瞄算法,提前预测因曲率产生的偏差,并调节前轮转角,这种控制器需要设计复杂的预瞄时间调节算法^[4-6]。另外,一些学者通过前轮转角补偿减小曲率对轨迹跟踪精度的影响,但是补偿算法的工况适应能力不强^[7-10]。此外,上述两种方法无法解析表达曲率对前轮转角的影响,可解释性差。

轨迹跟踪算法根据所使用的模型不同,可分为无模型算法,如比例、积分和微分(Proportional、Integral、Derivative, PID)控制^[11];基于几何关系的算法,如纯跟踪和Stanley^[12,13];基于动力学模型的优化算法,如模型预测控制(Model predictive control, MPC)和线性二次型调节器(Linear quadratic regulator, LQR)^[7,8,14-16]。无模型算法鲁棒性差,需要设计自适应控制器对算法参数进行调节;基于几何关系的算法在中低速小曲率工况有较好的跟踪效果,高速大曲率工况下性能变差,并出现车辆失稳问题。在极限或紧急工况下,需要采用优化算法^[1,17]。

优化算法中, MPC用于带约束的多变量/多目标问题,设计过程考虑目标最优,在智能车辆轨迹跟踪中应用较广^[18,19],包括线性MPC和非线性MPC^[16,20-24]。由于计算耗时、实验验证困难、系统稳定性无法保证等原因,非线性MPC应用受限。一般采用线性模型或者将非线性模型局部线性化,利用线性MPC算法得到最优控制率,提高算法的实时性^[19,25,26]。

本文提出了一种带前轮转角补偿的曲率增广MPC+比例积分(PID)控制器。首先,建立车辆二自由度动力学模型,将曲率作为增广状态变量建立状态空间方程,设计线性MPC算法,推导出曲率和前轮转角的解析表达式,并进行定量分析。然后,利用李雅普诺夫第一方法确定预测时域,以保证算法稳定、量化稳态误差。为了解决稳态误差不为零的问题,并联PI控制器以补偿前轮转

角,分析轨迹跟踪控制器的稳定性、稳态误差和动态特性。最后,通过仿真验证了控制器的控制效果。

1 基于Frenet坐标系的车辆二自由度模型

根据单轨车辆模型(见图1)沿y轴的受力平衡及绕z轴的力矩平衡可得:

$$\begin{cases} ma_y = F_{yf} + F_{yr} \cos \delta_f \\ I\ddot{\varphi} = F_{yf} \cos \delta_f l_f - F_{yr} l_r \end{cases} \quad (1)$$

式中: m 为车辆质量; a_y 为车辆质心绝对横向加速度; F_{yf} 、 F_{yr} 为前、后轮受到的横向力; δ_f 为前轮转角; I 为车辆绕z轴的转动惯量; $\dot{\varphi}$ 为车辆横摆角加速度; l_f 、 l_r 为前、后轴距质心的距离。

如图1所示,其中, OXY 为大地坐标系, oxy 为自车坐标系。

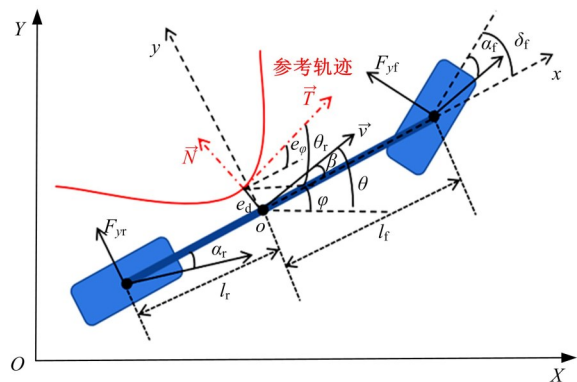


图1 单轨二自由度车辆模型及Frenet坐标系
Fig. 1 Vehicle dynamic model and Frenet coordinate system

车辆质心绝对横向加速度 a_y 与车辆在自车坐标系下的横向速度 v_y 、纵向速度 v_x 以及大地坐标系下的横摆角速度 $\dot{\varphi}$ 有如下关系:

$$a_y = \dot{v}_y + v_x \dot{\varphi} \quad (2)$$

假设轮胎处于线性工作区,前、后轮的侧偏角 α_f 和 α_r 较小,且 δ_f 较小,则有:

$$\begin{cases} F_{yf} = 2C_{af}\alpha_f \\ F_{yr} = 2C_{ar}\alpha_r \\ \alpha_f \cong \frac{v_y + \dot{\varphi}l_f}{v_x} - \delta_f \\ \alpha_r \cong \frac{v_y - \dot{\varphi}l_r}{v_x} \end{cases} \quad (3)$$

式中: C_{af} 、 C_{ar} 分别为前、后轮的单个轮胎侧偏刚度。

将式(2)(3)代入式(1)整理可得单轨二自由度车辆动力学模型为:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{mv_x} & \frac{\sigma_2}{mv_x} \\ \frac{\sigma_2}{Iv_x} & \frac{\sigma_3}{Iv_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2C_{af}}{m} \\ -\frac{2C_{af}l_f}{I} \end{bmatrix} \delta_f \quad (4)$$

式中: $\sigma_1 = 2(C_{af} + C_{ar})$; $\sigma_2 = 2C_{af}l_f - 2C_{ar}l_r$; $\sigma_3 = 2C_{af}l_f^2 + 2C_{ar}l_r^2$ 。

假设车辆质心距参考轨迹最近点(投影点)的距离为横向偏差 e_d , 质心的速度向量为 \vec{v} , 车辆航向角为 θ , 投影点的切线方向 \vec{T} 与大地坐标系 X 轴夹角为 θ_r , 则有:

$$\dot{e}_d = |\vec{v}| \sin(\theta - \theta_r) \quad (5)$$

车辆质心侧偏角 β 一般情况下较小, 假设 $\varphi - \theta_r$ 也为较小量, 其中 φ 为车辆横摆角, 则式(5)可近似表示为:

$$\dot{e}_d = v_y + v_x(\varphi - \theta_r) \quad (6)$$

本文暂不考虑车辆的纵向控制, 则 v_x 为常数, 对式(6)求导可得:

$$\ddot{e}_d = \dot{v}_y + v_x(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_r) \quad (7)$$

另外定义:

$$e_\varphi = \varphi - \theta_r \quad (8)$$

假设 $\ddot{\theta}_r$ 可忽略不计, 则有:

$$\begin{cases} \dot{e}_\varphi = \dot{\varphi} - \dot{\theta}_r \\ \ddot{e}_\varphi = \ddot{\varphi} \end{cases} \quad (9)$$

给定参考轨迹曲率 κ , 有:

$$\dot{\theta}_r = v_x \kappa \quad (10)$$

令状态变量 $x = [e_d \ \dot{e}_d \ e_\varphi \ \dot{e}_\varphi]^T$, 控制量 $u = \delta_r$, 联立式(4)(7)(9)(10), 可得到 Frenet 坐标系下基于偏差和偏差导数的二自由度模型为:

$$\dot{x} = Ax + Bu + D\kappa \quad (11)$$

$$\text{式中: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1}{mv_x} & -\frac{\sigma_1}{m} & \frac{\sigma_2}{mv_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{Iv_x} & -\frac{\sigma_2}{I} & \frac{\sigma_3}{Iv_x} \end{bmatrix}; \quad B =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2C_{af}}{m} & 0 & -\frac{2C_{af}l_f}{I} \end{bmatrix}^T; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sigma_2}{m} - v_x^2 & 0 & \frac{\sigma_3}{I} \end{bmatrix}^T。$$

式(11)选择的状态变量中, e_d 和 e_φ 可通过车辆位姿及参考轨迹确定, 而 \dot{e}_d 和 \dot{e}_φ 与 v_x 及 v_y 相关, 需要通过估计得到。

2 曲率增广 MPC 控制器设计及算法

MPC 一般用于离散系统, 首先, 需要将式(11)转换为固定采样频率的离散方程, 假设采样时间为 T , 则有:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) + \bar{D}\kappa(k) \quad (12)$$

$$\text{式中: } \bar{A} = \left(I - \frac{AT}{2}\right)^{-1} \left(I + \frac{AT}{2}\right); \quad \bar{B} = \left(I - \frac{AT}{2}\right)^{-1} BT; \quad \bar{D} = \left(I - \frac{AT}{2}\right)^{-1} DT。$$

对式(12)直接使用 MPC 会由于 $\bar{D}\kappa(k)$ 的非线性导致计算负荷大幅度增加^[3]。本文设计了曲率增广 MPC 控制器, 将曲率作为状态变量进行一次增广, 由于 MPC 具有预测功能, k 时刻只需增广当前投影点的曲率。为了保证车辆稳定性和驾乘舒适性, 以控制增量 Δu (前轮转角增量) 作为新的控制量, 进行控制量的二次增广。二次增广后的状态变量 $\tilde{x} = [e_d \ \dot{e}_d \ e_\varphi \ \dot{e}_\varphi \ \kappa \ u]^T$, 输出量 $e = x = [e_d \ \dot{e}_d \ e_\varphi \ \dot{e}_\varphi]^T$, 状态空间方程和输出方程可表示为:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\Delta u(k) \\ e(k) = C\tilde{x}(k) \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{式中: } \tilde{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{5 \times 5} & \hat{B}_{5 \times 1} \\ 0_{1 \times 5} & I_{1 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{5 \times 1} \\ I_{1 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \hat{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{4 \times 4} & \bar{D}_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & I_{1 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}; \quad C = [I_{4 \times 4} \ 0_{4 \times 2}]。$$

令:

$$\begin{cases} E(k) = \begin{bmatrix} e(k+1) \\ e(k+2) \\ \vdots \\ e(k+N_p) \end{bmatrix} \\ \Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (14)$$

式中: $e(k+i)$ 和 $\Delta u(k+j)$ 分别为 k 时刻预测的输出量和计算的控制量, $i=1, 2, \dots, N_p$, $j=0, 1, \dots, N_c-1$, 其中, N_p 和 N_c 分别为 MPC 的预测步长和控制步长。

$$E(k) = \Psi \tilde{x}(k) + \Theta \Delta U(k) \quad (15)$$

式中: $\Psi = [C\tilde{A} \quad C\tilde{A}^2 \quad \dots \quad C\tilde{A}^{N_c} \quad \dots \quad C\tilde{A}^{N_r}]^T$;

$$\Theta = \begin{bmatrix} C\tilde{B} & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 1} \\ C\tilde{A}\tilde{B} & C\tilde{B} & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0_{4 \times 1} \\ C\tilde{A}^{N_c}\tilde{B} & C\tilde{A}^{N_c-1}\tilde{B} & \dots & C\tilde{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\tilde{A}^{N_r-1}\tilde{B} & C\tilde{A}^{N_r-2}\tilde{B} & \dots & C\tilde{A}^{N_r-N_c}\tilde{B} \end{bmatrix}.$$

设计如下代价函数:

$$\min J = (E - E_{des})^T Q (E - E_{des}) + \Delta U^T R \Delta U \quad (16)$$

式中:等号右边第1项为轨迹跟踪精度,由于状态空间方程为偏差形式,系统输出的目标值 $E_{des} = 0_{4N_r \times 1}$;第2项为车辆的平顺性; Q 和 R 分别为系统输出和控制量的权重矩阵, Q 为半正定矩阵, R 为正定矩阵。

后续分析假设 Q 矩阵对角线的所有子矩阵相同,记为 Q_1 , R 矩阵对角线的所有元素相同,记作 r_1 ,则有:

$$\left\{ \begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{4 \times 4} & \dots & \dots & \dots & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & Q_1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0_{4 \times 4} & \dots & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & \dots & Q_1 & 0_{4 \times 4} & \vdots \\ \vdots & 0_{4 \times 4} & \dots & 0_{4 \times 4} & \ddots & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & \dots & \dots & \dots & 0_{4 \times 4} & Q_1 \end{bmatrix}_{N_r \times N_r} \\ R &= \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \end{bmatrix}_{N_c \times N_c} ; \\ Q_1 &= \begin{bmatrix} w_{e_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{e_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{e_\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{e_\varphi} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

式中: w_{e_d} 、 w_{e_d} 、 w_{e_φ} 、 w_{e_φ} 分别为各输出量的权重系数。

将式(15)代入式(16),代价函数可表示成线性二次型规划形式,为了保证迭代过程有最优解,加入松弛因子 ρ 。考虑转向时的稳定性和舒适性,且为了避免控制量饱和,对前轮转角变化量和前轮转角进行约束,最终的代价函数为:

$$\begin{cases} \min_{\Delta U} J = [\Delta U; \varepsilon]^T H [\Delta U; \varepsilon] + G^T [\Delta U; \varepsilon] \\ \text{st. } \Delta U_{\min} \leq \Delta U \leq \Delta U_{\max}, U_{\min} \leq U \leq U_{\max} \end{cases} \quad (18)$$

式中: ε 为加入松弛因子产生的控制量; $H =$

$$\begin{bmatrix} \Theta^T Q \Theta + R & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 2\Theta^T Q \Psi \tilde{x}(k) \\ 0 \end{bmatrix}; \Delta U_{\min},$$

ΔU_{\max} 为前轮转角增量的最小值矩阵和最大值矩阵; U 为控制时域内的前轮转角矩阵; U_{\min} 、 U_{\max} 分别为前轮转角的最小值矩阵和最大值矩阵。

式(18)存在最小值的前提是 H 矩阵为正定矩阵。根据 H 的表达式可判断其为对称阵,当整车和MPC控制器的参数确定, H 仅与车速有关。通过 H 的一般表达式无法得到其特征值的解析解,为了不失一般性,将车速从低速到高速的连续工况离散化,分别选择车速为3、10、20、30、40、50 m/s 共计6个车速计算特征值,结果均大于0,则 H 正定,代价函数有局部最优解。由于约束均为线性函数,局部最优解为全局最优解^[27]。

不同车速下 H 的第一个特征值相差较大,其他特征值接近。通过相似度比较,车速为3 m/s和50 m/s条件下 H 的相似度为99.12%;随着车速升高, H 趋向于相同,车速为20 m/s和30 m/s的相似度达到99.99%,因此,曲率增广MPC的最优控制量主要取决于 G 矩阵。

下面分析曲率增广对控制器性能的影响。比较仅进行控制量增广、曲率作为扰动项去除的MPC控制器(记作MPC₁)和本文设计的控制器(记作MPC₂),假设两种控制器的 Q 和 R 相同,则 H 相同,曲率增广不影响系统的可行性及收敛速度;MPC₂的 G 矩阵较MPC₁多了曲率增广项(记作 G_κ),计算得到的最优控制量不同,即 $G_2 = G_1 + G_\kappa$, G_1 和 G_2 分别为MPC₁和MPC₂的 G 矩阵。

式(18)是一个带线性约束的凸优化问题。此外,除了停车和掉头等特殊工况,实际道路半径远大于车辆的最小转弯半径,控制量饱和的情况并不经常发生^[3]。根据KKT条件,约束条件的系数 $\lambda_i = 0$, i 代表第 i 个约束条件,MPC1和MPC2的式(18)的全局最优解 ΔU_1^* 、 ΔU_2^* 满足以下条件:

$$\begin{cases} 2H\Delta U_1^* + G_1 = 0 \\ 2H\Delta U_2^* + G_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

则有:

$$\Delta U_2^* = \Delta U_1^* - \frac{H^{-1}G_\kappa}{2} \quad (20)$$

MPC₂的最优解多了因曲率增广出现的

$-\frac{H^{-1}G_k}{2}$ 项, MPC 将计算的最优控制量矩阵的第一个值施加到系统, 则曲率增广补偿的前轮转角 Δu_k 可表示为:

$$\Delta u_k = -\frac{I_{N_c \times 1} H^{-1} G_k}{2} \quad (21)$$

图 2 为不同曲率和车速下 Δu_k 的理论值, 相同曲率下, 车速增加, Δu_k 变大; 曲率增大, Δu_k 随着车速增长的幅度变大。

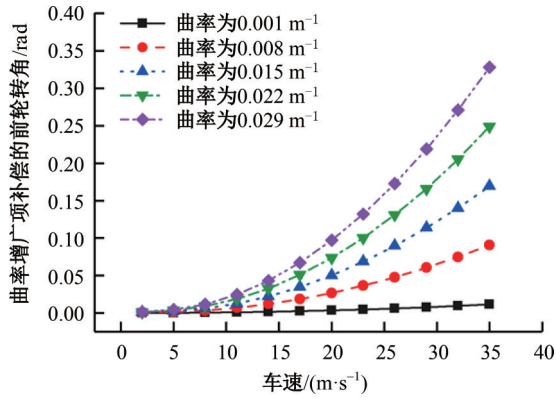


图 2 曲率增广项补偿的前轮转角

Fig. 2 Front wheel angle compensated by curvature augmentation

3 曲率增广 MPC 的稳定性及 PI 控制器的设计

前文仅通过部分车速下 H 矩阵的特征值, 分析系统存在全局最优解, 没有对一般情况下的稳定性以及稳态误差进行说明。下面利用李雅普诺夫直接方法证明算法的稳定性, 给出稳定条件及保证算法稳定的 N_p 取值, 通过分析系统平衡点确定稳态误差。分析发现, 曲率增广 MPC 的稳态横向偏差不为零, 为此设计 PI 控制器以减小稳态误差、提高轨迹跟踪精度。

3.1 曲率增广 MPC 的李雅普诺夫稳定性分析

定理 当满足以下条件, MPC 控制器渐近稳定^[28]:

- (1) 状态变量约束集合 $X_R \in X$, 且 $0 \in X_R$ 。
- (2) 对于 $\forall x \in X_R$, 局部最优控制量 $u = k_{opt}(x) \in U$, x 为状态变量。
- (3) 对于 $\forall x \in X_R$, 下一时刻的状态变量 $x^+ = f(x, k_{opt}(x)) \in X_R$ 。
- (4) 对于 $\forall x \in X_R$, $F(x, k_{opt}(x)) + l_{N-1}(x, k_{opt}(x)) \leq 0$ 。

其中, X, U 分别为状态变量和控制量的约束

集; $k_{opt}(\cdot)$ 为局部最优控制量表达式; $f(\cdot)$ 为离散系统的状态空间方程; $F(\cdot) = x_N^T \Gamma_N x_N$ 为终端代价; $F(\cdot)$ 为相邻两个预测时域的终端代价的变化量; $l_i(\cdot) = x_i^T \Gamma_i x_i + \Omega_i u_i^2$ 为预测时域内的阶段代价; x, u 分别为预测时域内的状态变量和局部最优控制量; Γ, Ω 分别为 x, u 的权重矩阵; $i = 0, 1, 2, \dots, N-1, N$ 为预测步长和控制步长。

证明 针对式 (15) 的状态空间方程, 以式 (16) 作为李雅普诺夫函数。假设预测步长和控制步长相同, 均为 N_p , 则李雅普诺夫函数可表示为:

$$V(k) = x(k + N_p)^T Q_1 x(k + N_p) + \sum_{i=0}^{N_p-1} (x(k+i)^T Q_1 x(k+i) + r_1 \Delta u(k+i)^2) \quad (22)$$

则 $V(k)$ 正定。 $V(k)$ 的梯度为:

$$\begin{aligned} \nabla V(k) = V(k+1) - V(k) = & F(x(k+1), k_{opt}(x(k+1))) + \\ & l_{N_p-1}(x(k+1), k_{opt}(x(k+1))) - \\ & l_0(x(k), k_{opt}(x(k))) \end{aligned} \quad (23)$$

如果条件 (4) 满足, 则 $\nabla V(k)$ 负定, 控制系统渐近稳定。

u 为待优化的控制量, 条件 (2) 可以满足, 而其他 3 个条件成立一般需要将终端代价设为零^[25], 限制过于严格。大多数情况下, 参考轨迹的曲率连续变化, 终端代价是终端约束内的连续函数, 当采样时间足够小, $F(\cdot) \rightarrow 0$ 。MPC 要求预测时域不小于控制时域, 且控制时域外的控制量为零, 因此, 当预测时域边缘的跟踪偏差满足 $x(k + N_p)^T Q_1 x(k + N_p) - x(k)^T Q_1 x(k) = -\sigma$, $\sigma > 0$ 时, 系统渐近稳定。

为了保证有一定的稳定裕度, 本文选择:

$$x(k + N_p)^T Q_1 x(k + N_p) = 0.7x(k)^T Q_1 x(k) \quad (24)$$

3.2 控制步长和预测步长的确定

控制时域对轨迹跟踪精度的影响不大^[19], 为了减轻计算负荷, N_c 取 3, 此外, 根据文献[29], N_p 和 N_c 满足:

$$2N_c < N_p < 3N_c \quad (25)$$

下面确定 N_p 的取值。首先设置初始预测步长 N_{pini} , 并根据式 (24) 确定 N_p 的取值范围, 然后结合式 (25), 根据控制器的性能要求和计算负荷确定 N_p 。

定义 $x(k+i)^T Q_1 x(k+i)$ 为 k 时刻预测时域

内的跟踪偏差代价, $i = 1, 2, \dots, N_p$ 。当整车参数和地面附着系数 μ 确定时,跟踪偏差主要受车速和参考轨迹曲率的影响, $\kappa = 0.01 \text{ m}^{-1}$ 为大曲率轨迹的临界值^[6],图3为该曲率条件下,预测时域内的跟踪偏差代价与车速的关系,其中, i 表示预测时域内的第 i 步。根据车辆稳定性条件,有:

$$v_x^2 \kappa \leq \mu g \quad (26)$$

式中: g 为重力加速度,取值为 9.8 m/s^2 。

该曲率工况下的最高稳定车速为 28 m/s ,为了提高 N_p 取值的鲁棒性,选择最高车速为 30 m/s 。首先,确定一个较大的初始预测步长 N_{pini} 以保证有满足式(24)的 N_p 取值范围,车速为 30 m/s 时,通过对比 N_{pini} 为 15 和 10 的跟踪偏差代价,发现初始预测步长对偏差代价基本没有影响,因此,本文将 N_{pini} 设为 15。图3中选取车速 10、20、25、30 m/s 分别计算偏差代价,可以看出,当车速不高于 20 m/s 时,预测时域末端的偏差代价变大的幅度较小, N_p 的取值范围较大,以 20 m/s 为例,满足式(24)的取值范围为 $N_p \leq 14$;随着车速的加快,预测时域末端的偏差代价增大的幅度变大,限制了 N_p 的选择范围,当车速为 30 m/s 时, $N_p \leq 8$ 可保证算法稳定。

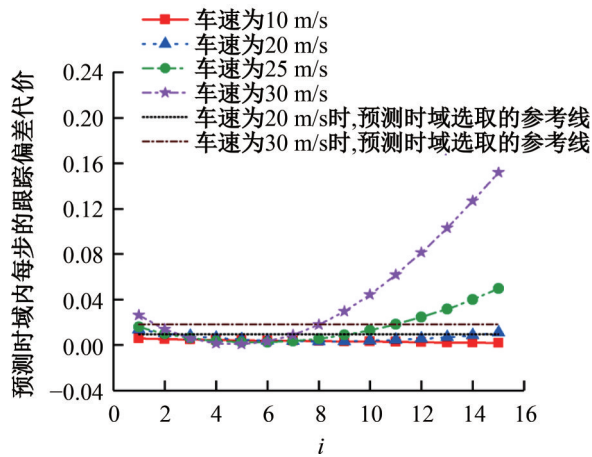


图3 车速对预测时域内的跟踪偏差代价的影响及预测步长的选取

Fig. 3 Influence of vehicle speed on tracking deviation in prediction horizon and prediction step size selection

车辆在行驶过程中的速度变化较大,利用上述方法确定满足式(24)的 N_p 取值范围不可行。实际上,参考轨迹由轨迹规划层确定,轨迹跟踪过程的曲率已知。在某曲率条件下,极限车速工况确定的 N_p 取值范围可以保证该曲率下极限车速内所有工况的算法稳定。因此,确定某参考轨迹

下满足式(24)的 N_p 取值范围的可行方法为:首先确定轨迹曲率的最大值,然后确定该曲率下以极限车速行驶时保证算法稳定的 N_p 取值范围,该范围即当前轨迹下满足稳定性要求的 N_p 取值范围。如果轨迹的最大曲率为 0.01 m^{-1} ,保证算法稳定的 N_p 取值范围是 $N_p \leq 8$ 。

最后,确定 N_p 的取值。预测时域较小,车辆无法及时转向造成轨迹跟踪失败,预测时域增加,系统的计算负荷较大,结合式(25), 0.01 m^{-1} 曲率下的预测步长可选择为 8。

为了提高算法的实时性,可以将不同曲率下的 N_p 值存储在控制器中。

3.3 曲率增广MPC的稳态误差

如果系统渐近稳定,可将 $\dot{x} = 0$ 和曲率增广MPC计算的前轮转角 δ_{MPC} 代入式(11)得到稳态误差。确定车辆参数和车速后, H 为定常矩阵, G_2 与当前状态变量有关。假设初始前轮转角为零,根据式(19), δ_{MPC} 可表示为包含偏差、偏差导数及曲率的线性方程,即:

$$\begin{cases} \delta_{MPC} = \hat{K} \times \hat{x} \\ \hat{K} = [k_{e_d} \quad k_{\dot{e}_d} \quad k_{e_\varphi} \quad k_{\dot{e}_\varphi} \quad k_\kappa] \\ \hat{x} = [e_d \quad \dot{e}_d \quad e_\varphi \quad \dot{e}_\varphi \quad \kappa]^T \end{cases} \quad (27)$$

式中: k 为各状态变量的系数。

计算得到的稳态误差 x_s :

$$x_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{e_d}} \left[L + \frac{mv_x^2 \sigma_2}{4C_{af} C_{ar} L} + k_{e_\varphi} \left(l_r + \frac{mv_x^2 l_f}{2C_{ar} L} \right) - k_\kappa \right] \kappa \\ 0 \\ - \left(l_r + \frac{mv_x^2 l_f}{2C_{ar} L} \right) \kappa \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$\dot{e}_d, \dot{e}_\varphi$ 的稳态误差均为零, e_d 和 e_φ 的稳态误差不为零。当整车参数和车速确定时, e_φ 的稳态误差 $(e_\varphi)_s$ 仅与曲率 κ 相关,当 κ 为零, $(e_\varphi)_s$ 为零,随着 $|\kappa|$ 增加, $|(e_\varphi)_s|$ 变大。根据 α_r 的定义,有:

$$(e_\varphi)_s = -(l_r \kappa + \alpha_r) = -\beta \quad (29)$$

因此,实际航向角偏差的稳态误差也为零。横向偏差的稳态误差 $(e_d)_s$ 与 $\kappa, k_{e_d}, k_{e_\varphi}, k_\kappa$ 相关, κ 的影响与 $(e_\varphi)_s$ 一样, $|k_{e_d}|$ 增大, $|(e_d)_s|$ 减小,但无法收敛到零。 $(e_d)_s$ 为零需要匹配 k_{e_φ} 和 k_κ ,这不是可行的控制器设计方式。

3.4 PI控制器的设计

PI算法可以消除稳态误差,能保证系统的响应速度,且结构简单。为了进一步减小稳态横向偏差,同时避免参数改变或其他不可测的扰动对跟踪性能的影响,本文提出一种基于横向偏差的PI控制器进行前轮转角补偿,即:

$$\begin{cases} \delta_{PI} = k_p e_d + k_i \int_0^t e_d dt \\ \delta_i^* = \delta_{MPC} + \delta_{PI} \end{cases} \quad (30)$$

式中: δ_{PI} 为PI控制器补偿的前轮转角; k_p 为比例系数; k_i 为积分系数; δ_i^* 为总前轮转角。

本文所设计的控制器的整体结构如图4所示, (X, Y) 为车辆质心位置的大地坐标, (X_r, Y_r) 为质心在参考轨迹投影点的坐标。

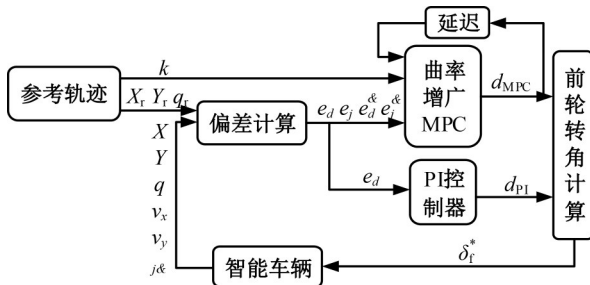


图4 曲率增广MPC+PI控制器的结构

Fig. 4 Structure of curvature augmentation MPC+PI controller

4 曲率增广MPC+PI控制器分析

下面对曲率增广MPC+PI控制器的稳定性进行说明,并分析其阶跃输入稳态误差以及系统动态特性。

4.1 稳定性

结合式(27)(30),可以得到最终施加到控制对象的前轮转角为:

$$\delta_i^* = (k_e + k_p) e_d + k_i \int_0^t e_d dt + k_{e_d} \dot{e}_d + k_{e_\varphi} e_\varphi + k_{e_{\dot{\varphi}}} \dot{e}_\varphi + k_\kappa \kappa \quad (31)$$

将式(31)代入式(11),且仅考虑B矩阵中非零元素对应的行,化简得到的微分方程为:

$$\begin{cases} \ddot{e}_d = \lambda_{e_{d11}} e_d + \lambda_{e_{d12}} \int_0^t e_d dt + \lambda_{e_{d13}} \dot{e}_d + \lambda_{e_{\varphi11}} e_\varphi + \lambda_{e_{\varphi12}} \dot{e}_\varphi + \lambda_{\kappa1} \kappa \\ \ddot{e}_\varphi = \lambda_{e_{\varphi21}} e_d + \lambda_{e_{\varphi22}} \int_0^t e_d dt + \lambda_{e_{\varphi23}} \dot{e}_d + \lambda_{e_{\varphi21}} e_\varphi + \lambda_{e_{\varphi22}} \dot{e}_\varphi + \lambda_{\kappa2} \kappa \end{cases} \quad (32)$$

式中: $\lambda_{..}$ 为化简得到的系数,由于篇幅限制,此处省略具体表达式。

对式(32)进行拉普拉斯变换,假设初始条件为零,则有:

$$\begin{aligned} (s^3 - \lambda_{e_{d13}} s^2 - \lambda_{e_{d11}} s - \lambda_{e_{d12}}) E_d(s) - (\lambda_{e_{\varphi11}} + \lambda_{e_{\varphi12}} s) s E_\varphi(s) &= \lambda_{\kappa1} s K(s) \\ (s^2 - \lambda_{e_{\varphi22}} s - \lambda_{e_{\varphi21}}) s E_\varphi(s) - (\lambda_{e_{d23}} s^2 + \lambda_{e_{d21}} s + \lambda_{e_{d22}}) E_d(s) &= \lambda_{\kappa2} s K(s) \end{aligned} \quad (33)$$

式中: $E_d(s)$ 、 $E_\varphi(s)$ 、 $K(s)$ 分别为 e_d 、 e_φ 、 κ 的拉普拉斯变换。

根据式(33)可以得到曲率作为输入、横向偏差或横摆角偏差作为输出的传递函数:

$$r_d(s) = \frac{E_d(s)}{K(s)} = \frac{s(\lambda_{\kappa1} s^2 + \gamma_{\kappa d1} s + \gamma_{\kappa d2})}{s^5 + \gamma_{d1} s^4 + \gamma_{d2} s^3 + \gamma_{d3} s^2 + \gamma_{d4} s + \gamma_{d5}} \quad (34)$$

$$r_\varphi(s) = \frac{E_\varphi(s)}{K(s)} = \frac{\lambda_{\kappa2} s^3 + \gamma_{\kappa\varphi1} s^2 + \gamma_{\kappa\varphi2} s + \gamma_{\kappa\varphi3}}{s^5 + \gamma_{\varphi1} s^4 + \gamma_{\varphi2} s^3 + \gamma_{\varphi3} s^2 + \gamma_{\varphi4} s + \gamma_{\varphi5}} \quad (35)$$

式中: $r_d(s)$ 为横向偏差的传递函数; $r_\varphi(s)$ 为横摆角偏差的传递函数; $\gamma_{..}$ 为推导得到的系数,此处省略具体表达式。

线性系统稳定的充分必要条件是其特征多项式的所有根(即传递函数的极点)位于左半复数平面^[30]。式(34)(35)可以通过选择 k_p 和 k_i 保证上述条件成立,曲率增广MPC+PI控制器的稳定性说明完毕。

4.2 阶跃输入稳态误差

阶跃输入下,输入曲率的拉普拉斯变换为:

$$K(s) = \frac{\kappa}{s} \quad (36)$$

假设 $r_d(s)$ 的极点为 p_{d1} 、 p_{d2} 、 p_{d3} 、 p_{d4} 、 p_{d5} , $r_\varphi(s)$ 的极点为 $p_{\varphi1}$ 、 $p_{\varphi2}$ 、 $p_{\varphi3}$ 、 $p_{\varphi4}$ 、 $p_{\varphi5}$,将式(36)代入式(34)(35),并进行部分分式分解可得:

$$E_d(s) = \frac{\eta_{d1}}{s - p_{d1}} + \frac{\eta_{d2}}{s - p_{d2}} + \frac{\eta_{d3}}{s - p_{d3}} + \frac{\eta_{d4}}{s - p_{d4}} + \frac{\eta_{d5}}{s - p_{d5}} \quad (37)$$

$$E_\varphi(s) = \frac{\eta_{\varphi0}}{s} + \frac{\eta_{\varphi1}}{s - p_{\varphi1}} + \frac{\eta_{\varphi2}}{s - p_{\varphi2}} + \frac{\eta_{\varphi3}}{s - p_{\varphi3}} + \frac{\eta_{\varphi4}}{s - p_{\varphi4}} + \frac{\eta_{\varphi5}}{s - p_{\varphi5}} \quad (38)$$

式中: η 为分式分解得到的各项系数。

对式(37)(38)两边分别进行拉普拉斯逆变换可得:

$$\begin{cases} e_d(t) = \eta_{d1} \exp(p_{d1}t) + \eta_{d2} \exp(p_{d2}t) + \\ \eta_{d3} \exp(p_{d3}t) + \eta_{d4} \exp(p_{d4}t) + \\ \eta_{d5} \exp(p_{d5}t) \\ e_\varphi(t) = \eta_{\varphi0} + \eta_{\varphi1} \exp(p_{\varphi1}t) + \eta_{\varphi2} \cdot \\ \exp(p_{\varphi2}t) + \eta_{\varphi3} \exp(p_{\varphi3}t) + \\ \eta_{\varphi4} \exp(p_{\varphi4}t) + \eta_{\varphi5} \exp(p_{\varphi5}t) \end{cases} \quad (39)$$

由于 $r_d(s)$ 和 $r_\varphi(s)$ 的极点均位于左半复数平面,则有:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} e_d(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi(t) = \eta_{\varphi0} \end{cases} \quad (40)$$

加入 PI 控制器后,横向偏差的稳态误差为零,横摆角偏差的稳态误差不为零,但实际跟踪过程中考虑的是航向角偏差,确定 k_p 和 k_i 时,确保 $\eta_{\varphi0}$ 与式(29)的横摆角偏差的稳态误差接近即可。

4.3 动态特性

对于式(34)(35)所示的高阶系统,分析其动态特性比较困难,一般使用如下两个命题进行化简^[30]:

命题 1 如果传递函数的某一极点和某一零点相距很近,则该极点和零点近似抵消。

命题 2 如果传递函数的某个极点距离原点很远,则可忽略该极点的作用。

因此,通过选取 k_p 和 k_i ,合理配置传递函数的零点和极点,并利用命题 1 和 2 将式(34)(35)化简为二阶系统,同时考虑阻尼系数对系统的影响,使得控制器的动态特性在响应时间和超调量之间折中。

5 仿真分析

曲率增广 MPC+PI 控制器的主要目的是提高非直线轨迹下的跟踪精度。为了验证其控制效果,选择曲率突变的 Fishhook 轨迹以及曲率连续变化的双移线轨迹,设计了 4 种控制器,利用 Simulink 和 CarSim 联合仿真进行比较。4 种控制器分别为预瞄 MPC、曲率增广 MPC、预瞄 MPC+PI、曲率增广 MPC+PI。最后,利用双移线轨迹验证了本文所设计控制器在不同地面附着系数下的性能。预瞄 MPC 将参考轨迹曲率作为扰动量去除,并选取车辆前方的点(预瞄点)作为参考点计算跟踪偏差,确定算法输出的控制量,详见参考文献[4]。

预瞄 MPC 的预瞄时间在 $0.016v_x \sim 0.02v_x$

之间选择^[4],经过多次仿真,设置为 $0.017v_x$ 。仿

真采样时间为 0.01 s, $Q_1 = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$r_1 = 500, \rho = 1000$, Fishhook 轨迹和双移线轨迹的 N_p 均为 8, N_c 为 3。不同控制器比较时,地面附着系数 μ 设为 0.8。仿真采用的整车参数如表 1 所示,仿真结果的航向角偏差为 $e_\varphi + \beta$ 。

表 1 仿真用的整车参数

Table 1 Vehicle parameters for simulation

车辆参数	数值
车辆质量 m/kg	1723
前轴距质心的距离 l_f/m	1.232
后轴距质心的距离 l_r/m	1.468
车辆绕 z 轴的转动惯量 $I/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	4175
前轮侧偏刚度 $C_{\alpha f}/(\text{N}\cdot\text{rad}^{-1})$	-66900
后轮侧偏刚度 $C_{\alpha r}/(\text{N}\cdot\text{rad}^{-1})$	-62700
前轮转角约束 $[u_{\min}, u_{\max}]/\text{rad}$	$[-0.3488, 0.3488]$
前轮转角变化量约束 $[\Delta u_{\min}, \Delta u_{\max}]/\text{rad}$	$[-0.0174, 0.0174]$

5.1 Fishhook 轨迹

Fishhook 轨迹用于分析控制器的阶跃输入响应,车速为 20 m/s 时,车辆直线行驶 1 s 后进入曲率为 0.01 m^{-1} 的弯道,仿真结果如图 5 所示。4 种控制器的前轮转角变化趋势相近且都收敛到 0.024 rad,预瞄 MPC+PI 控制器的波动幅度稍大,如图 5(a)所示。

图 5(b)(c)分别为 4 种控制器的横向偏差和航向角偏差。表 2 为均方根和进入弯道后稳定所需的时间。车辆进入弯道,曲率突变,4 种控制器都出现较大的横向偏差,带曲率增广 MPC 的两种控制器的偏差值远小于另外两种控制器;随着前轮转角的不断优化,偏差逐渐减小并收敛,仅曲率增广 MPC+PI 控制器收敛到零。相较于预瞄 MPC 控制器,曲率增广 MPC 控制器的横向偏差均方根降低了 80.2%;加入 PI 控制器后,偏差均减小。以曲率增广 MPC 控制器为例,加入 PI 控制器之前的偏差均方根为 0.0058 m,加入后为 0.0013 m,下降了 77.6%;相较于预瞄 MPC+PI 控制器,曲率增广 MPC+PI 控制器的横向偏差均方根降低了 91.8%。

同样地,由于曲率突变,4 种控制器在车辆进入弯道时出现较大的航向角偏差,随着控制器的干预,偏差逐渐减小并收敛,稳定后均接近零;带

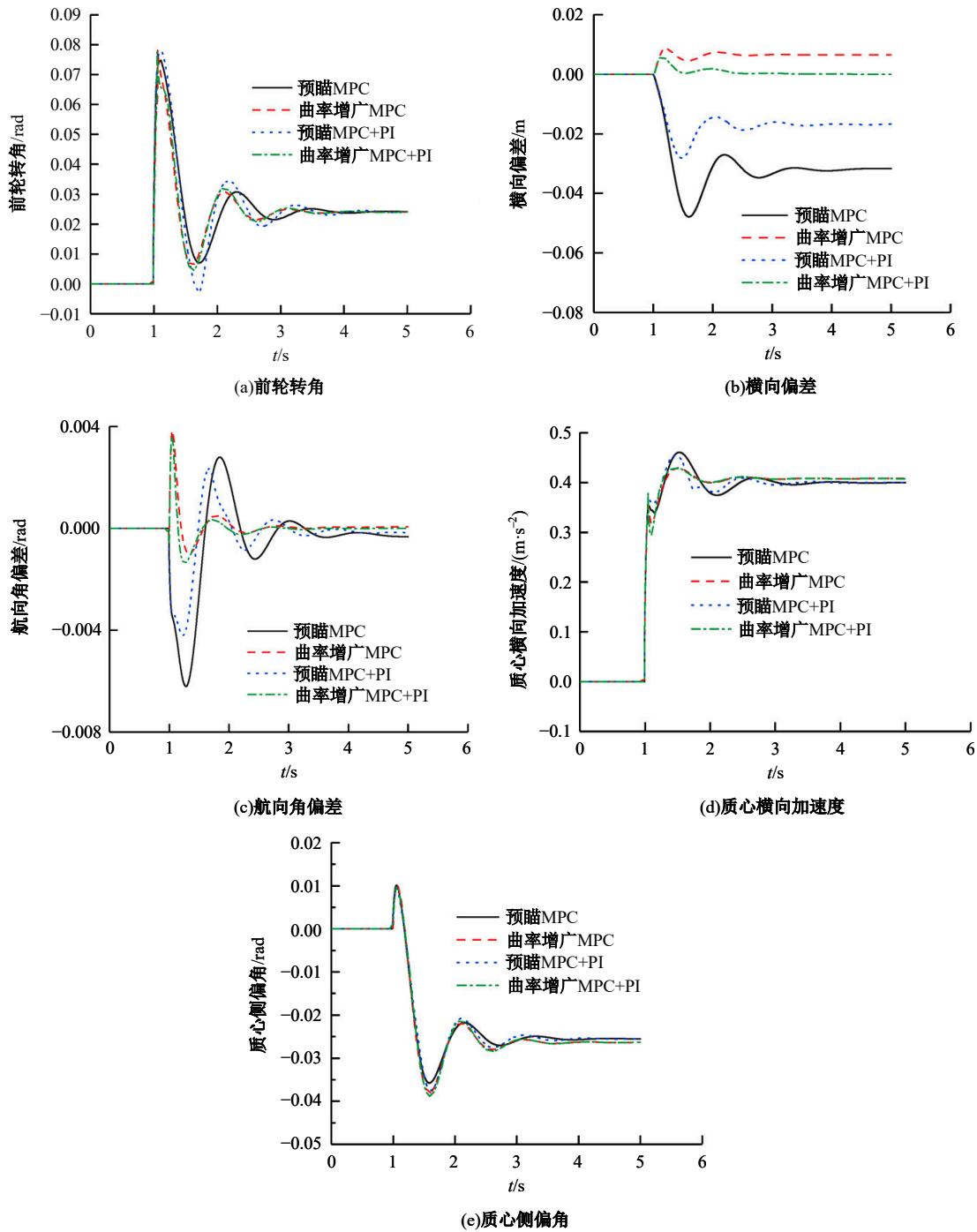


图 5 Fishhook 轨迹下的仿真结果

Fig. 5 Simulation results under Fishhook trajectory

曲率增广 MPC 的两种控制器的峰值和波动均较小,稳定值稍小;曲率增广 MPC 加入 PI 控制器后,航向角偏差变化不大,曲率增广 MPC 控制器的偏差均方根相较于预瞄 MPC 控制器下降了 68%;曲率增广 MPC+PI 控制器相较于预瞄 MPC+PI 控制器下降了 56.6%。

相较于预瞄 MPC 控制器,曲率增广 MPC 控制器进入弯道后稳定所需的时间缩短了 47.9%,

加入 PI 控制器对算法的收敛速度影响不大。

质心横向加速度和质心侧偏角是衡量车辆稳定性的重要指标。从图 5(d)(e)可以看出:4 种控制器的稳定性指标接近,以曲率增广 MPC+PI 控制器为例,质心横向加速度的峰值和均方根分别为 0.429 m/s²和 0.362 m/s²,质心侧偏角的峰值和均方根分别为 0.039 rad 和 0.023 5 rad,车辆稳定性较好。

表2 Fishhook轨迹下的横向偏差和航向角偏差的均方根及稳定时间

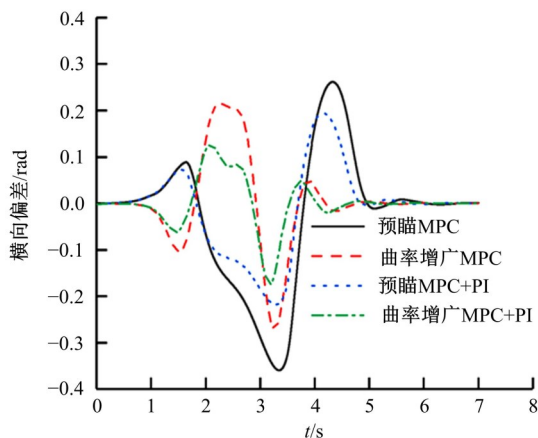
Table 2 Root mean square(RMS) and settling time of lateral deviation and heading angle deviation under Fishhook trajectory

控制器	横向偏差均方根/m	航向角偏差均方根/rad	稳定时间/s
预瞄MPC	0.0293	0.00172	2.647
曲率增广MPC	0.0058	0.00055	1.379
预瞄MPC+PI	0.0158	0.00113	2.361
曲率增广MPC+PI	0.0013	0.00049	1.22

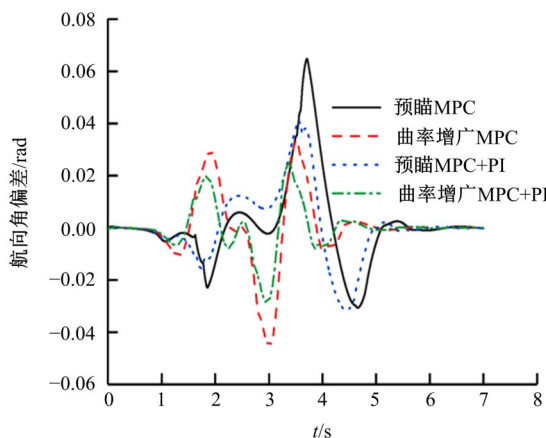
注:稳定时间是指车辆进入弯道后横向偏差和航向角偏差均稳定(波动在稳定值±5%范围内)的最长时间。

5.2 双移线轨迹

图6为车速为25 m/s时,双移线轨迹下的横向偏差和航向角偏差的仿真结果,其均方根如表3所示。由于曲率连续,车辆进入弯道未出现较大的偏差,随着曲率的增加,偏差变大,并在两个曲率峰值点附近达到最大;曲率增广MPC+PI控制器的横



(a)横向偏差



(b)航向角偏差

图6 双移线轨迹下的仿真结果

Fig. 6 Simulation results under double line shift trajectory

向偏差最小,预瞄MPC最大;带曲率增广MPC的两种控制器航向角偏差波动较小;曲率增广MPC+PI控制器的两个偏差的均方根相较于预瞄MPC+PI控制器分别下降了36.9%和36.5%。

表3 双移线轨迹下的横向偏差和航向角偏差的均方根
Table 3 RMS of lateral deviation and heading angle deviation under double line shift trajectory

控制器	横向偏差均方根/m	航向角偏差均方根/rad
预瞄MPC	0.1441	0.0164
曲率增广MPC	0.0932	0.0136
预瞄MPC+PI	0.0947	0.0137
曲率增广MPC+PI	0.0597	0.0087

5.3 不同地面附着系数下算法的性能

为了分析本文设计的控制器在不同地面附着系数下的性能,采用双移线轨迹,在冰雪路面($\mu = 0.3$)、潮湿的沥青路面($\mu = 0.6$)和干燥的沥青路面($\mu = 0.8$)进行仿真,控制器能够稳定的最高车速分别为15、25、30 m/s。

控制器在4种不同工况下的横向偏差和航向角偏差的均方根如表4所示。结果表明:车辆在不同的路面上以极限速度行驶时,控制器的控制效果较好,以 μ 为0.3、车速为15 m/s的工况为例,横向偏差和航向角偏差的均方根分别为0.06 m和0.013 rad;道路条件相同时,随着车速的升高,两个偏差的峰值变大,波动加剧,均方根增加, $\mu = 0.3$ 时,15 m/s车速下的横向偏差和航向角偏差的均方根相较于10 m/s分别增加了167.9%和175.6%。

表4 不同工况下曲率增广MPC+PI控制器的横向偏差和航向角偏差的均方根

Table 4 RMS of lateral deviation and heading angle deviation of curvature augmentation MPC + PI controller under different operating conditions

工况		横向偏差均方根/m	航向角偏差均方根/rad
车速/(m·s ⁻¹)	附着系数		
10	0.3	0.0224	0.0041
15	0.3	0.06	0.0113
25	0.6	0.1091	0.0203
30	0.8	0.1277	0.0234

6 结论

(1)本文针对参考路径曲率变化对车辆轨迹跟踪精度的影响问题,设计了一种曲率增广MPC

算法,并分析了曲率增广对算法的影响。曲率增广不影响算法的可行性和收敛速度,但可改变系统的最优控制量。

(2)利用李雅普诺夫直接方法分析了算法的稳定性,并提出基于参考轨迹最大曲率的极限车速确定预测步长的方法。通过系统平衡点获得稳态误差。针对稳态横向偏差不为零的问题,设计了PI控制器进行前轮转角补偿,合理选择PI算法的参数可保证曲率增广MPC+PI控制器稳定,在阶跃输入条件下该控制器消除了横向偏差的稳态误差。

(3)通过Simulink和CarSim联合仿真验证了算法的控制效果。本文所设计的控制器提高了轨迹跟踪精度且收敛速度更快,相比预瞄MPC+PI控制器,本文所设计的控制器在阶跃输入下,横向偏差和航向角偏差的均方根分别降低了91.8%和56.6%,稳定时间缩短了47.9%;双移线工况下,两个偏差的均方根分别降低了36.8%和36.5%。此外,该控制器在不同的地面附着系数和极限稳定车速下均能获得较好的控制效果。

参考文献:

- [1] Paden B, Cap M, Yong S Z, et al. A survey of motion planning and control techniques for self-driving urban vehicles[J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2016, 1(1): 33-55.
- [2] 陈特,陈龙,徐兴,等. 分布式驱动无人车路径跟踪与稳定性协调控制[J]. 汽车工程, 2019, 41(10): 1109-1116.
Chen Te, Chen Long, Xu Xing, et al. Coordinated control of path tracking and stability of distributed drive unmanned vehicles[J]. Automotive Engineering, 2019, 41(10): 1109-1116.
- [3] Xu S, Peng H. Design, analysis, and experiments of preview path tracking control for autonomous vehicles [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2020, 21(1): 48-58.
- [4] Dai C, Zong C, Chen G. Path tracking control based on model predictive control with adaptive preview characteristics and speed-assisted constraint[J]. IEEE Access, 2020, 8: 184697-184709.
- [5] 汪若尘,魏振东,叶青,等. 视觉预瞄式智能车辆纵横向协同控制研究[J]. 汽车工程, 2019, 41(7): 763-770,830.
Wang Ruo-chen, Wei Zhen-dong, Ye Qing, et al. A reasearch on visual preview longitudinal and lateral cooperative control of intelligent vehicle[J]. Automotive Engineering, 2019, 41(7):763-770,830.
- [6] 刁勤晴,张雅妮,朱凌云. 双预瞄点智能车大曲率路径的横纵向模糊控制[J]. 中国机械工程, 2019, 30(12): 1445-1452.
Diao Qin-qing, Zhang Ya-ni, Zhu Ling-yun. A lateral and longitudinal fuzzy control of intelligent vehicles with double preview points for large curvature roads[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(12): 1445-1452.
- [7] 胡杰,钟鑫凯,陈瑞楠,等. 基于模糊LQR的智能汽车路径跟踪控制[J]. 汽车工程, 2022, 44(1): 17-25.
Hu Jie, Zhong Xin-kai, Chen Rui-nan, et al. Path tracking control of intelligent vehicles based on fuzzy LQR[J]. Automotive Engineering, 2022, 44(1): 17-25.
- [8] 陈亮,秦兆博,孔伟伟,等. 基于最优前轮侧偏力的智能汽车LQR横向控制[J]. 清华大学学报:自然科学版, 2021, 61(9): 906-912.
Chen Liang, Qin Zhao-bo, Kong Wei-wei, et al. Lateral control using LQR for intelligent vehicles based on optimal front-tire lateral force[J]. Journal of Tsinghua University(Natural Science Edition), 2021, 61(9): 906-912.
- [9] Chen X, Peng Y, Hang P, et al. Path tracking control of four-wheel independent steering electric vehicles based on optimal control[C]//2020 39th Chinese Control Conference, Shenyang, China, 2020: 5436-5442.
- [10] He H, Shi M, Li J, et al. Design and experiential test of a model predictive path following control with adaptive preview for autonomous buses[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 157(99): 107701-107720.
- [11] Netto S M. Nested PID steering control for lane keeping in autonomous vehicles[J]. Control Engineering Practice, 2011, 19(12): 1459-1467.
- [12] Ahn J, Shin S, Kim M, et al. Accurate path tracking by adjusting Look-ahead point in pure pursuit method [J]. International Journal of Automotive Technology, 2021, 22(1): 119-129.
- [13] Amer N H, Hudha K, Zamzuri H, et al. Adaptive modified Stanley controller with fuzzy supervisory system for trajectory tracking of an autonomous armoured vehicle[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2018, 105:94-111.
- [14] 刘凯,陈慧岩,龚建伟,等. 高速无人驾驶车辆的操控稳定性研究[J]. 汽车工程, 2019, 41(5): 514-521.

- Liu Kai, Chen Hui-yan, Gong Jian-wei, et al. A reaserch on handling stability of high-speed unmanned vehicles [J]. *Automotive Engineering*, 2019, 41(5): 514-521.
- [15] Peng H, Wang W, An Q, et al. Path tracking and direct yaw moment coordinated control based on robust MPC with the finite time horizon for autonomous independent-drive vehicles[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020, 69(6): 6053-6066.
- [16] Beal C E, Gerdes J C. Model predictive control for vehicle stabilization at the limits of handling[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(4): 1258-1269.
- [17] Amer N H, Zamzuri H, Hudha K, et al. Modelling and control strategies in path tracking control for autonomous ground vehicles: a review of state of the art and challenges[J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems Theory & Application*, 2017, 86: 225-254.
- [18] 陈慧岩, 陈舒平, 龚建伟. 智能汽车横向控制方法研究综述[J]. *兵工学报*, 2017, 38(6): 1203-1214.
- Chen Hui-yan, Chen Shu-ping, Gong Jian-wei. A review on the research of lateral control for intelligent vehicles[J]. *Journal of Ordnance Industry*, 2017, 38(6): 1203-1214.
- [19] Cheng S, Li L, Guo H Q, et al. Longitudinal collision avoidance and lateral stability adaptive control system based on MPC of autonomous vehicles[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2019(99): No. 2918176.
- [20] Liang Y, Li Y N, Khajepour A, et al. Holistic adaptive multi-model predictive control for the path following of 4WID autonomous vehicles[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020(99): 26-45.
- [21] Falcone P, Borrelli F, Asgari J, et al. Predictive active steering control for autonomous vehicle systems [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2007, 15(3): 566-580.
- [22] Brown M, Funke J, Erlien S, et al. Safe driving envelopes for path tracking in autonomous vehicles[J]. *Control Engineering Practice*, 2017, 61: 307-316.
- [23] Attia R, Basset M, Orjuela R. Combined longitudinal and lateral control for automated vehicle guidance [J]. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 2014, 52(2): 261-279.
- [24] Liu J C, Jayakumar P, Stein J L, et al. Combined speed and steering control in high-speed autonomous ground vehicles for obstacle avoidance using model predictive control[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2017, 66(10): 8746-8762.
- [25] 许芳, 张君明, 胡云峰, 等. 智能车辆路径跟踪横纵向耦合实时预测控制器[J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2021, 51(6): 2287-2294.
- Xu Fang, Zhang Jun-ming, Hu Yun-feng, et al. Lateral and longitudinal coupling real-time predictive controller for intelligent vehicle path tracking [J]. *Journal of Jilin University (Engineering Edition)*, 2021, 51(6): 2287-2294.
- [26] Bai G, Meng Y, Liu L, et al. Review and comparison of path tracking based on model predictive control [J]. *Electronics*, 2019, 8(10): 1077-1109.
- [27] Boyd S, Vandenberghe L. *Convex optimization*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [28] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.
- [29] Kanchwala H, Viana I B, Aouf N. Cooperative path-planning and tracking controller evaluation using vehicle models of varying complexities[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2021, 235(16): 2877-2896.
- [30] 吴麒. *自动控制原理*[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.